

# المزكرة الأساسية في الرياضيات



الرياضيات بشكل مختلف

إعداد الأستاذ / أحمد محروس

## الفرع الأول: الجبر

١) أمثلة على الأعداد النسبية

$$\frac{5}{2}, \frac{3}{-4}, \frac{7}{9}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{4}{7}, \frac{6}{8}, \frac{9}{10}$$

وكان بالله

جميع الأعداد الصحيحة هي

أعداد نسبية، أي أن  $[N \subset Q]$

٢) يكون  $\frac{p}{q}$  نسبياً إذا كان

$$p \neq 0$$

مثال:  $\frac{3}{-5}$  فإن  $3 \neq 0$  إذا كان

٣) الصفح هو الصفح العكسي

في  $n$  بينما الواحد هو العكسي الواحد

العكسي في  $n$

٤) (أو كوس العكسي) ← نفي؟ إشارة

العدد فقط

..... أو بد العكسي العكسي لكل من: -

$$\frac{2}{3} \leftarrow \frac{2}{-3} \quad \frac{3}{-4} \leftarrow \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{-2} \leftarrow \frac{1}{2}$$

٥) (أو كوس العكسي) ← نفي؟

للعدد فقط

..... أو بد العكسي العكسي

$$\frac{2}{-3} \leftarrow \frac{2}{3} \quad \frac{3}{-4} \leftarrow \frac{3}{4}$$

### قواعد الإشارات

١) حاصل ضرب وشارج قسمة الإشارات

لعتشابهة دائماً يكون موجبة

$$\oplus = \frac{+}{+} \quad \oplus = + \times +$$

$$\oplus = \frac{-}{-} \quad \oplus = - \times -$$

$$7 = 9 \times 3 \quad 7 = 9 - 3$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{2}{-3}$$

٢) حاصل ضرب وشارج قسمة الإشارات

لوعكسية دائماً يكون سالبة

$$\ominus = \frac{+}{-} \quad \ominus = - \times +$$

$$\ominus = \frac{-}{+} \quad \ominus = \frac{+}{-}$$

$$7 = 9 \times 3 \quad 7 = 9 - 3$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{2}{-3} \quad \frac{3}{-4} = \frac{3}{-4}$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{2}{-3} \quad \frac{3}{-4} = \frac{3}{-4}$$

### الأعداد النسبية

١) هو الأعداد النسبية وشارج على الصورة  $\frac{p}{q}$  حيث  $p \neq 0$  و  $q \neq 0$



## جمع وطرح الحدود الجبرية

أولاً: جمع الحدود الجبرية:-

• يفضل استخدام الطريقة الرأسية

مثال: أجمع المقادير

$$2x^2 - 5x + 7 + 4x^2 + 3x - 9$$

الخطوة

$$2x^2 + 4x^2 - 5x + 3x + 7 - 9$$

$$6x^2 - 2x - 2$$

$$6x^2 - 2x - 2$$

ثانياً: طرح الحدود الجبرية:-

• يفضل أيضاً استخدام الطريقة الرأسية

مثال: أطلع

$$2x^2 - 5x + 7 - (4x^2 + 3x - 9)$$

الخطوة

$$2x^2 - 5x + 7 - 4x^2 - 3x + 9$$

$$-2x^2 - 8x + 16$$

$$-2x^2 - 8x + 16$$

## خرب الحدود والمقادير الجبرية

أولاً: ضرب الحدود الجبرية

• نظرية العامل في العامل والرمز في الرمز

مثال:  $(2x - 3)(x + 4)$

$$2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12$$

## الحدود والمقادير الجبرية

1) الحد الجبري: يتكون من عامل مشترك عاملية أو أكثر

مثال:  $5x^2 - 3x + 7$

عامل عددي (العامل) عامل جبري

2) درجة الحد الجبري: هي مجموع أسس

العوامل الجبرية دون الحدودية

مثال:  $5x^2$  من الدرجة الثانية

$3x^2$  من الدرجة الثانية

$2x^2$  من الدرجة الثانية

$7x$  من الدرجة الأولى

3) المقادير الجبرية: يتكون من حدين

جبريين أو أكثر ويضرب بينهما + أو -

فقد:  $5x^2 + 3x - 7$  مقدار جبري

$5x^2 + 3x - 7$  مقدار جبري من ثلاث

حدود

4) درجة المقادير الجبرية: هو أعلى

درجة للحدود المكونة له

مثال:  $5x^2 + 3x - 7$  من الدرجة الثانية

$3x^2 + 5x - 7$  من الدرجة الثانية

$5x^2 + 3x - 7$  من الدرجة الثانية

5) تشابه الحدود الجبرية إذا كانت

الرموز والأسس

مثال:  $[5x^2 - 3x + 7]$  و  $[2x^2 - 5x + 9]$



## قسمة الحدود والمقادير

قوله: قسمة كثيرات كثيرات

نقسم الكل على الكل  
ونقسم الزمالة الزمالة بطرح الأسس

مثال:  $\frac{10x^2 - 5x}{5x} = 2x - 1$

$\frac{10x^3 - 5x^2}{5x^2} = 2x - 1$

ثانياً: قسمة مقدار على كثير

نقسم كل حد من حدود هذا المقدار  
على هذا الحد مع مراعاة قواعد الأسس

مثال:  $\frac{10x^3 + 5x^2 - 1}{5x} = 2x^2 + x - \frac{1}{5x}$

ثالثاً: قسمة مقدار على مقدار آخر

تتبع الخطوات التالية:

مثال: أوجد خارج قسمة  $10x^3 + 5x^2 - 1$  على  $5x$

الخطوة الأولى: نرتب الحدود أولاً

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \phantom{- 1} \\ 0x^3 + 0x^2 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \phantom{- 1} \\ 0x^3 + 0x^2 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \phantom{- 1} \\ 0x^3 + 0x^2 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \phantom{- 1} \\ 0x^3 + 0x^2 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \phantom{- 1} \\ 0x^3 + 0x^2 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \phantom{- 1} \\ 0x^3 + 0x^2 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x^3 + 5x^2 - 1 \\ 5x \overline{) 10x^3 + 5x^2 - 1} \\ \underline{10x^3 + 5x^2} \phantom{- 1} \\ 0x^3 + 0x^2 - 1 \end{array}$$

هذه خارج قسمة  $(10x^3 + 5x^2 - 1)$  على  $5x$

$$\frac{10x^3 + 5x^2 - 1}{5x} = 2x^2 + x - \frac{1}{5x}$$

ثانياً: ضرب كثيرات كثيرات

نضرب هذا الحد في كل حد من حدود  
المقدار [يكون نقول بالتوزيع]

مثال:  $(2x - 4)(x - 5) = 2x^2 - 10x - 4x + 20 = 2x^2 - 14x + 20$

$$(2x - 4)(x - 5) = 2x^2 - 10x - 4x + 20 = 2x^2 - 14x + 20$$

ثالثاً: ضرب مقدارين كثيرين

(أ) الضرب بوجود النظم

مثال:  $(x + 3)(x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$

$$(x + 3)(x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

$$(x + 3)(x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

$$(x + 3)(x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

$$(x + 3)(x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

$$(x + 3)(x - 4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

(ب) مجموع حدين في الفرق بينهما

قاعدة:  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

مثال:  $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$$

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$$

(ج) مربع مقدار ذي حدين

قاعدة:  $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$

مثال:  $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$



## الاعداد الحقيقية 2

نظري باللائمة من الكلام 1 و 2 -

$$\{ \emptyset \} \cup \{ \emptyset \} = \{ \emptyset \} \cup \{ \emptyset \} = \{ \emptyset \}$$

$$\emptyset = \{ \emptyset \} \cap \{ \emptyset \} \quad \{ \emptyset \} = \{ \emptyset \} - \emptyset$$

$$\emptyset = \{ \emptyset \} \cap \{ \emptyset \} \quad \emptyset = \{ \emptyset \} - \{ \emptyset \}$$

$$\sqrt{p} = \sqrt{p} \times \sqrt{p} \quad 1$$

$$\frac{p}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sqrt{p}} \quad 2$$

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}} \times \frac{p}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sqrt{p}} \quad 3$$

ثانياً: الجزوي التجميعية

$$\sqrt{p} = \sqrt{p} \times \sqrt{p} \quad 1$$

$$\frac{p}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sqrt{p}} \quad 2$$

نماذج من الكلام

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

الخطوة

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p}$$

مثال

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

الخطوة

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p}$$

مثال

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

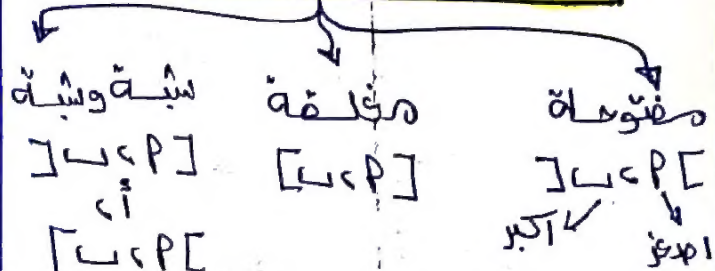
الخطوة

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

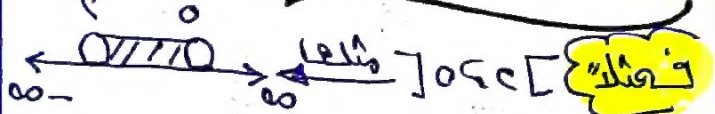
$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

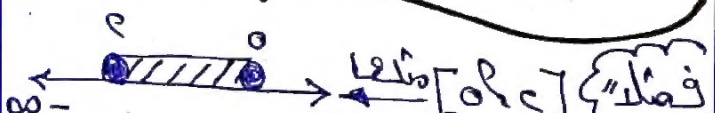
## الفترة



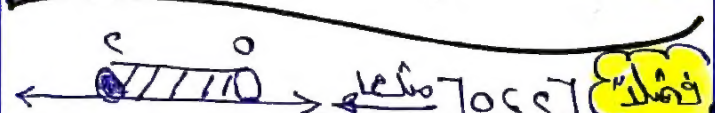
### (أ) الفترة المفتوحة



### (ب) الفترة المغلقة



### (ج) فترة مفتوحة، فترة مغلقة، فترة نصف مفتوحة



## العمليات على الجزوي التجميعية وتكيفية

أولاً: الجزوي التجميعية



# المعادلات

## أولاً: معادلة الدرجة الأولى

**تعريف:** معادلة من الدرجة الأولى  
التي يكون فيها الحد الأقصى للحدود الحرة  
« المتغير » الذي يحقق المعادلة

**خطوات الحل** (توجد 3 خطوات)

**مثال**  $1 = 2 + 3$

الخطوة الأولى  
 $1 = 2 + 3$

$1 - 2 = 3$   $\Rightarrow 1 - 2 = 3$

$\{1\} = 3$

**مثال**  $14 = 7 + 3$

الخطوة الأولى  
 $14 = 7 + 3$

$14 = 7 + 3$

$14 - 7 = 3$

$14 - 7 = 3 \Rightarrow 7 = 3$

$\{7\} = 3$

**مثال**  $6 = 1 - 3$

الخطوة الأولى  
 $6 = 1 - 3$

$6 = 1 - 3$

$1 + 6 = 3$

$0 = 3$  **بطل**

$0 = 3 \Rightarrow 0 = 3 \times 0 = 3$

$\{0\} = 3$

**مثال**  $3 = 2 - 0$

الخطوة الأولى  
 $3 = 2 - 0$

$3 = 2 - 0$

$0 = 3$  **بطل**

$0 = 3 \Rightarrow 0 = 3$

$\{1\} = 3$

## ثانياً: حل معادلة الدرجة الثانية

معادلة الدرجة الثانية هي الصورة

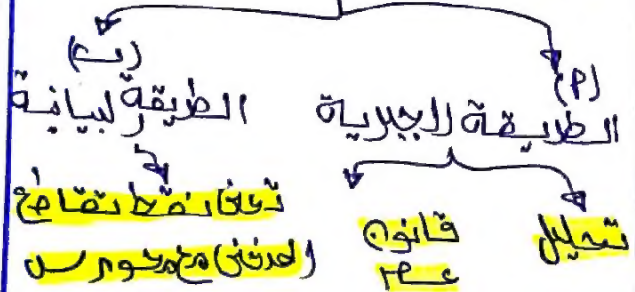
$[P = 2 + 3 + 4 = 9]$

حيث  $P$  هي المعادلة

أو معادلة

أو المعادلة المطلقة

..... طرق الحل .....



## (أ) الطريقة الجبرية

بما يستند إلى التحليل أو القانون  
أو أي من مبادئ تحليل المعادلة

**مثال**  $0 = 3 - 2 = 1$

الخطوة الأولى

يسهل تحليلها  $(3 - 2) = 1$

أو كما ذكرنا

وهذه المعادلة ليست تحليلية  
لذلك نلجأ للقانون الثاني

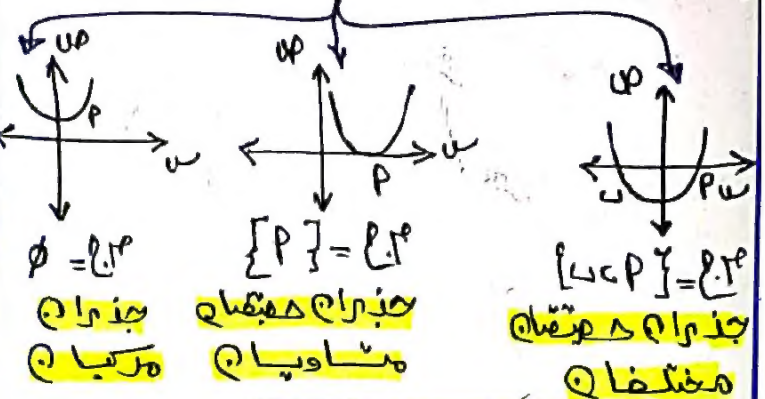
5



## ١١) الطريقة البيانية

للتحديد لاجموعة من المعادلات التربيعية  
بيانياً [هندسياً] نوجد نقطة تقاطع  
المعادلتين مع محور السينات

.....



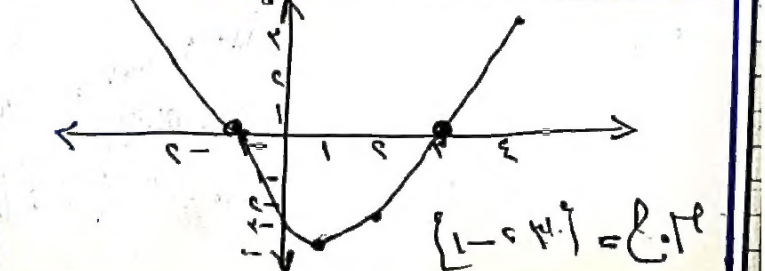
### طريقة التحليل

أو لا يعطى فترة  
أو لا يعطى فترة  
أو لا يعطى فترة  
أو لا يعطى فترة  
أو لا يعطى فترة  
أو لا يعطى فترة  
أو لا يعطى فترة  
أو لا يعطى فترة  
أو لا يعطى فترة  
أو لا يعطى فترة

مثال ارسم  $x^2 - 5x + 6 = 0$  بالفترة  $[2, 6]$

الفترة  $[2, 6]$

٤	٣	٢	١	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
٥	٠	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨



## ١٢) معادلات عامة على

الترتيبين جذري

الترتيبين جذري

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q}$$

لدينا

إذا كان أحد الجذرين مكوس  
يكون للآخرين  $u=0$

إذا كان أحد الجذرين مكوس  
يكون للآخرين  $p=0$

مثال أو يحد مجموع وحاصل ضرب  
الجذور الآتية :-

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

مجموع الجذرين  $\frac{5}{1} = 5$

حاصل ضربهم  $\frac{6}{1} = 6$

ثانياً - تكويته معادلة  
الترتيبين حتى عام جذري

إذا كان الجذرين هما  $l, m$   
فإن المعادلة تكون على الصورة

$$x^2 - (l+m)x + lm = 0$$

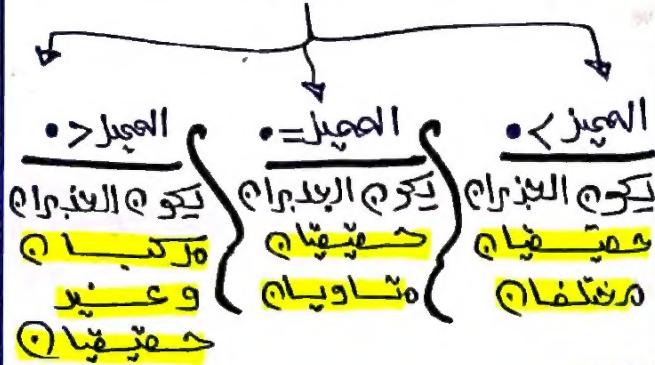
مثال كون المعادلة التي جذريها  $2, 3$   
على الصورة

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$



## نوبت الحيز بـ ٤-٥

وعندك ثلث حركات



**مثال** حدد نوع البذرة للعبارات التالية:

١  $٥ - ٤ - ٣ = ٢$

الحيز بـ ٤-٥  $٥ - ٤ - ٣ = ٢$

البذرة مفتوحة مختلفة

٢  $٥ + ٤ = ٩$

الحيز بـ ٤-٥  $٥ + ٤ = ٩$

البذرة مفتوحة متساوية

٣  $٥ + ٤ = ٩$

الحيز بـ ٤-٥  $٥ + ٤ = ٩$

البذرة مفتوحة متساوية

٤ **الرياضة علم وفن**

## \* متطابقات عامة ونظائر

١  $١ + ٢ = ٣$

٢  $١ + ٢ = ٣$

٣  $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

٤  $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

٥  $١ - ٢ = -١$

**مثال** إذا كان  $١ = ٢$  فما جذور المعادلة

$١ = ٢$

كوه المعادلة التي جذورها  $\frac{١}{٢}$  و  $\frac{١}{٣}$

من المعادلة التي جذورها

١  $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$

من المعادلة التي جذورها

$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

من المعادلة التي جذورها

$١ = ٢$

ثالثاً: تحديد نوع جذور المعادلة التربيعية



# قواعد التحليل

قواعد التحليل بإخراج العامل المشترك

$$P(a+b) = Pa + Pb$$

مثال:  $6x^2 + 10x = 2x(3x + 5)$

$$= 2x(3x + 5)$$

مثال:  $9x^2 - (x+5) = (x+5)(x-9)$

$$= (x+5)(x-9)$$

ثانياً: تحليل فرق مربعين

$$P^2 - Q^2 = (P-Q)(P+Q)$$

مثال:  $9 - x^2 = (3-x)(3+x)$

$$16 - 9x^2 = (4-3x)(4+3x)$$

$$(x+5)^2 - 4 = (x+5-2)(x+5+2)$$

$$= (x+3)(x+7)$$

ثالثاً: مجموع و فرق مكعبين

$$(P^3 + Q^3)(P+Q) = P^3 + Q^3$$

$$(P^3 - Q^3)(P-Q) = P^3 - Q^3$$

مثال:  $8 + 27x^3 = (2+3x)(4-6x+9x^2)$

$$9 - 2x^3 = (3-x)(9+3x+x^2)$$

$$3x^2 - 11x + 6 = (3x-2)(x-3)$$

$$= (3x-2)(x-3)$$

$$= (3x-2)(x-3)$$

$$= (3x-2)(x-3)$$

وأخيراً: تحليل المقدار الثلاثي

البسيط  $ax^2 + bx + c$

قاعدة: العدد الذي يأخذ علامة

الذوية

والعدد الذي يأخذ علامة

حزبه إلى علامتان، ويكونان

الضامة الحاسمة

مثال

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2 - 11x + 18 = (x-2)(x-9)$$

خامساً: المقدار الثلاثي غير

البسيط  $ax^2 + bx + c$

سنستخدم طريقة المقصود (جرب)

وبنجد أن العدد الحاسم

$$x^2 + 7x + 12$$

مثال

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

$$= (x+3)(x+4)$$

$$= (x+3)(x+4)$$

$$= (x+3)(x+4)$$

$$= (x+3)(x+4)$$

$$= (x+3)(x+4)$$

9



## سادساً: تحليل المقدار التربيعي المربع الكامل (ع)

كيف نعرفه أن المقدار الذي أمامنا  
مربع كامل :-

① الحد الأول - مربع كامل و إشارة +

② الحد الأخير - مربع كامل و إشارة +

③ الحد الأوسط  $\pm 2 \times \sqrt{\text{الأول}} \times \sqrt{\text{الثالث}}$

مثال:  $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

مثال:  $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

أولاً في الفرق جيداً

حلل

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} x^2 + 10x + 25 \\ x^2 - 10x + 25 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \text{مربع كامل} \\ \text{مربع كامل} \end{array} \right) \\ & \left( \begin{array}{l} x^2 + 10x + 25 \\ x^2 - 10x + 25 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \text{مربع كامل} \\ \text{مربع كامل} \end{array} \right) \end{aligned}$$

## سابعاً: التحليل بالتقسيم

عبارة من مقدار مكون من ثلاث أو أربعة  
حدود والحد الأول وآخر الطرق

P انقسم المقدار إلى مقدارين  
كل منهما يتكون من حدين

ان انقسم المقدار إلى مربع كامل  
مكون من ثلاث حدود و حد آخر

مثال:  $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$$(x+3)(x+2)$$

مثال:  $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

## تعاوينك متنوعة على التحليل

①  $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

②  $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

③  $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

$$(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$$

$$(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$$

$$(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$$



## حامل الحزب الديكارتي

أولى زوجات ذو حبيب مريت

إذا كان  $(P, L) = (S, U)$

فإن  $U = P$  و  $U = L$

مثال إذا كان  $(S, U) = (A, C) = (U, P)$

فإن  $S = U$  و  $C = U$

الآن

$A = U$

$C = U$

$A = U$

$C = U$

$U = A$

$U = C$

ثانية - حامل الحزب الديكارتي  
للمجموعتين وصيلة

إذا كان  $\{1, 2, 3\} = S$  و  $\{4, 5, 6\} = U$

$\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\} = U \times S$

$\{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} = U \times S$

وكن

$\{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\} = S \times U$

$\{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} = S \times U$

نتيجة

$S \times U \neq U \times S$

وكن  $(S \times U) \cap (U \times S) = (U \times U) \cap (S \times S)$

في المثال السابق

$N = (S) = \text{عدد عناصر } S = 3$

$N = (U) = \text{عدد عناصر } U = 3$

$N = (S \times U) = (3 \times 3) = 9$

الآن

مثال

مثال

مثال

مثال

## الدوال

أولى زوجات ذو حبيب مريت

دالة

دالة

دالة

دالة

دالة

دالة

دالة

دالة

دالة

دالة



(ب) لو أعطى بيان العلاقة ع :-

هنا العلاقة تعتبر دالة إذا ظهر كل عنصر كحصة أول مرة واحدة

مثال بين أيامها دالة أم لا

1 بيان ع = { (١٠٠١) ، (٥٠٢) ، (٦٠٤) }

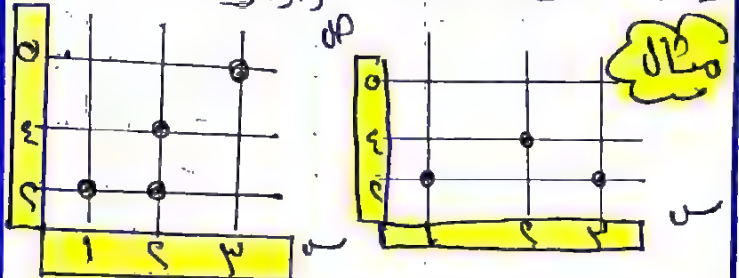
النتيجة  
تعتبر دالة لأن كل عنصر من عناصرها  
أول مرة واحدة [أي زنة لا يتكرر]

2 بيان ع = { (١٠٠١) ، (٥٠٢) ، (٦٠٤) }

النتيجة  
ليست دالة لأن العنصر 1 ظهر أكثر  
من مرة كحصة أوله.

(ب) لو أعطى منطوق بيان ع :-

هنا العلاقة تعتبر دالة لو كان  
كل عنصر له محور التفاضل موزون  
واحدة فقط على المحاور الرأسية



[ليست دالة] [دالة]

لأن العنصر 1 له أكثر  
من موزون في م.

(د) لو أعطى علاقة مكتوبة :-

دالة لو أس م فردية

ليست دالة لو أس م زوجية

مثال

•  $٧٧ = ٤ - ٤ \leftarrow$  دالة

•  $٧٧ = ٥ - ٥ \leftarrow$  دالة

•  $٧٧ = ٢ + ٢ \leftarrow$  ليست دالة

•  $٧٧ = ١ \leftarrow$  دالة

خاتمة بالأس

↓ ↓

$٥ = ٥$

$٥ = ٧٧$

دالة ثابتة. ليست دالة

(هـ) لو أعطى رسم بياني للعلاقة

• نقول يا اختيار الخط الرأس

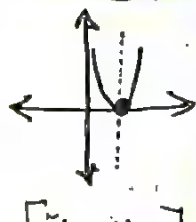
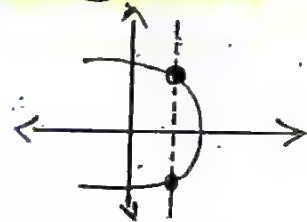
↓ ↓

لو قطع المنحنى

لو قطع المنحنى

في أكثر من نقطة  
ليست دالة

في نقطة واحدة  
تعتبر دالة



[ليست دالة]

[دالة]

ثانياً: أنواع الدوال

↓ ↓ ↓ ↓  
كثيرة  
عدد كرية جذرية أسية لوغاري

..... (P) دوال كثيرة حدود .....

↓ ↓ ↓  
ثابتة خطية تربيعية

↓ ↓ ↓  
(د)  $P = (٥) = ٥ + ٥$  (د)  $P = (٥) = ٥ + ٥$  (د)  $P = (٥) = ٥ + ٥$

↓ ↓ ↓  
مجالهم دائماً أو كامل م = م

12



## ثالثاً: مجال الدوال

### ① دوال كثيرات الحدود

مجال أعداد حقيقية ما لم يذكر خلافه ذلك

مثال

• د(س) = ٥ مجالها  $\mathbb{R}$

• د(س) =  $س^2 - ٤س + ٣$  مجالها  $\mathbb{R}$

• إذا كان د:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  حيث د(س) =  $س^2 + ٥س + ٣$

مجالها  $\mathbb{R}$  وليس  $\mathbb{R}^+$

• إذا كانت د(س) =  $س^2 + ٣$  حيث  $س \in [٢, ٤]$

مجالها  $[٣, ٤]$  وليس  $\mathbb{R}$

### ② الدالة العكسية

هي دالة تحتوي على متغير في المقام

فمثلاً د(س) =  $\frac{٥}{س^2 + ٣}$  د(س) =  $\frac{٥س - ١}{س^2 - ٤}$

بينما د(س) =  $\frac{س^2 + ٥}{٥}$  ليست دالة

كربية لأنها كثيرة حدود مجالها  $\mathbb{R}$

\*\*\* مجال الكسر =  $\mathbb{R} - \{ \text{أصفار المقام} \}$

مثال أوجد مجال ما يلي

$$د(س) = \frac{٥}{س^2 + ٣}$$

لوضع  $س^2 + ٣ = ٠$  ←  $س^2 = -٣$  المجال  $\mathbb{R}$

$$د(س) = \frac{س^2 - ٥}{س^2 - ٤}$$

الشرح

لوضع  $س^2 - ٤ = ٠$  ←  $س^2 = ٤$

$$س = \pm ٢$$

∴ مجال د =  $\mathbb{R} - \{ \pm ٢ \}$

مثال بالأسفل

$$د(س) = \frac{س^2 + ٥}{٥} \text{ هو } \mathbb{R}$$

$$د(س) = \frac{س^2 + ٥}{س^2 + ٤}$$

### ③ الدالة الجذرية

(أ) مجال الجذر الذي دالة تسمى دائماً هو  $\mathbb{R}^+$  بشرط وجوده فالبيد

$$د(س) = \sqrt{س^2 + ٥} \text{ هو } \mathbb{R}$$

$$د(س) = \frac{٢}{\sqrt{س^2 + ٥}} \text{ هو } \mathbb{R} - \{ ٠ \}$$

(ب) مجال الجذر لو كان الدليل زوجي

لوفي المقام

لوفي البسط

ما تحت الجذر <

ما تحت الجذر >

$$د(س) = \sqrt{س - ٤} \text{ هو } \mathbb{R}^+_{س \geq ٤}$$

الشرح

لوضع  $س - ٤ \geq ٠$  ←  $س \geq ٤$

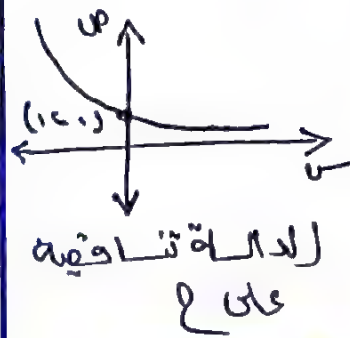
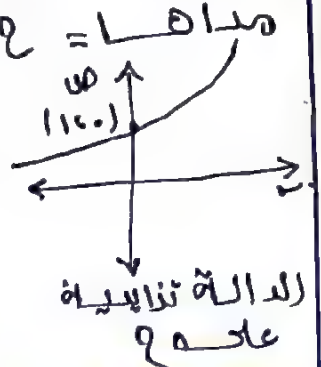
$$س \geq ٤$$

المجال  $[٤, \infty)$



## ④ مجال الدالة الأسية

الدالة الأسية هي  $y = a^x$   $a > 0$   
مجالها  $\mathbb{R}$   
مداه  $y > 0$

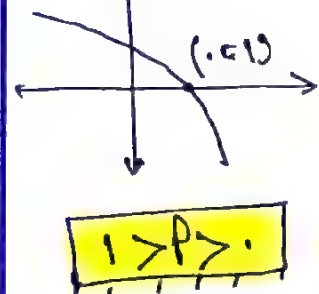
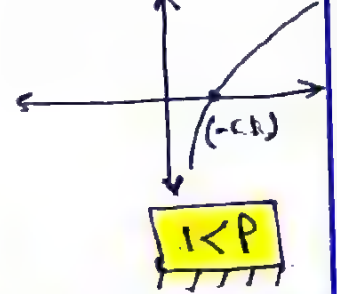


$$1 > P > 0$$

$$1 < P$$

## ⑤ مجال الدالة اللوغاريتمية

الدالة اللوغاريتمية هي  $y = \log_a x$   $a > 0$   
مجالها  $x > 0$   
مداه  $\mathbb{R}$

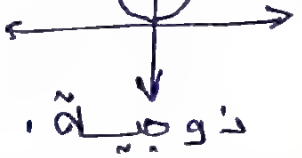
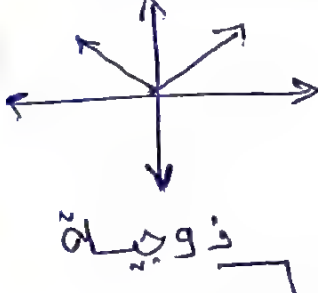
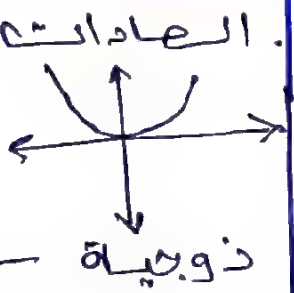


$$1 > P > 0$$

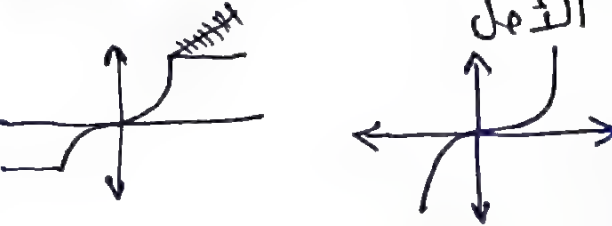
$$1 < P$$

## رابعة: الدالة الزوجية والفردية

يُقال للدالة أنها زوجية إذا كانت متماثلة حول محور الصادات.



يُقال للدالة أنها فردية إذا كانت متماثلة حول نقطة الأصل.



جبرية

تكون الدالة زوجية لو كانت

$$f(-x) = f(x)$$

تكون الدالة فردية لو كانت

$$f(-x) = -f(x)$$

تكون الدالة ليست زوجية وليست فردية

$$f(-x) \neq f(x) \text{ and } f(-x) \neq -f(x)$$

ملاحظات عامة

لو كان  $n$  زوجي لو كان  $n$  فردي

$$f(-x)^n = f(x)^n \quad f(-x)^n = -f(x)^n$$

فمثلاً  $f(x) = x^2$   $f(-x) = (-x)^2 = x^2$   $f(x) = x^3$   $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

$$f(x) = x^2 \text{ زوجية}$$

$$f(x) = x^3 \text{ فردية}$$

$$f(x) = x^4 \text{ زوجية}$$

لو كانت الفترة غير متماثلة

كانت الدالة ليست وليست

مثلاً  $f(x) = x^2$  في الفترة  $[0, 1]$  ليست زوجية

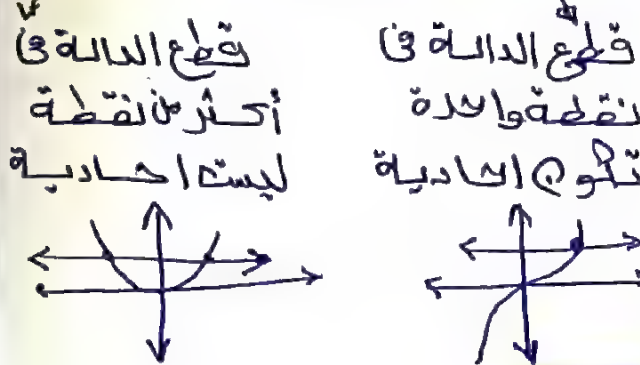
أو  $f(x) = x^3$  في الفترة  $[-1, 1]$  ليست فردية



## خاتمة: الدالة الاحادية

بياناً عن طريق اختبار الدخل

الدفع لـ



الامثلة

كل الدوال الزوجية ليست أحادية  
ليست حل الدوال الفردية دوال  
أحادية.

جبراً

ننظر في  $P$  ب  $3$  فوجد  
هو  $(P) = (D)$

لو كانت  $P \neq 3$  فهي ليست أحادية  
لو كانت  $P = 3$  فهي أحادية

مثال: أريد أن الدالة أحادية

$$\frac{1}{x^2 + 3} = (D)$$

النتيجة

ننظر في  $P$  ب  $3$  فوجد  
نقطع  $(D) = (P)$

$$\frac{1}{x^2 + 3} = \frac{1}{x^2 + 3}$$

$$x^2 + 3 = x^2 + 3$$

$$3 = 3$$

الدالة أحادية

مثال: أريد أن الدالة أحادية وليست زوجية أم فردية أم ليست

$$D(x) = x^2 - 3x + 5$$

النتيجة

$$D(x) = (x^2 - 3x + 5)$$

$$0 + 5 - 3 = 2$$

$$D(x) = D(x)$$

الدالة زوجية

النتيجة

$$D(x) = x^2 - 3x + 5$$

النتيجة

$$D(x) = (x^2 - 3x + 5)$$

$$D(x) = x^2 + 3x + 5$$

$$D(x) = (x^2 - 3x + 5)$$

$$D(x) = (x^2 - 3x + 5)$$

الدالة فردية

النتيجة

$$D(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3x + 5}$$

النتيجة

$$D(x) = \frac{(x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 3x + 5)}{(x^2 - 3x + 5) + (x^2 - 3x + 5)}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x + 5}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x + 5}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x + 5}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x + 5}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x + 5}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x + 5}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x + 5}$$

$$D(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x + 5}$$

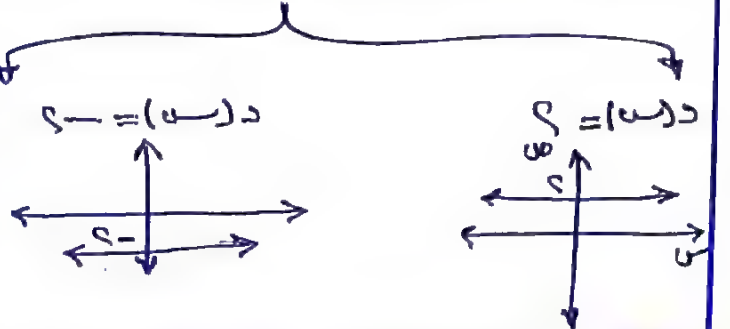
$$D(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x + 5}$$



## ٢) الدالة الثابتة

شكلها  $y = (x) = P$  رقم

هي دالة  $y = x$  حيث  $P$  ثابتة ونحتمل خط  
مستقيم يوازي محور السينات  
ويقطع الصادات في النقطة  $(0, P)$



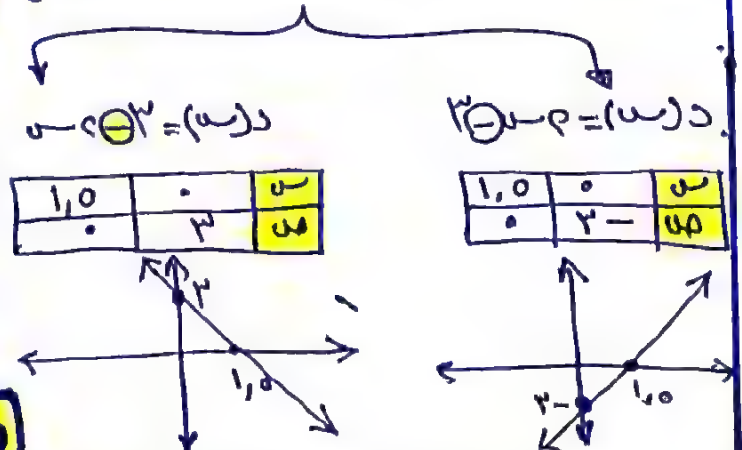
## ٣) الدالة الخطية

شكلها  $y = (x) = P + Qx$

هي دالة  $y = x$  حيث  $P$  و  $Q$  ثابتان ونحتمل خط  
مستقيم مائل يقطع محور  
الصادات في  $(0, P)$  ويقطع محور  
السينات في النقطة  $(-\frac{P}{Q}, 0)$

حالة بـ ١

$y = (x) = P + Qx$  هي دالة خطية تمثل  
خط مستقيم يمر بنقطة  $(0, P)$



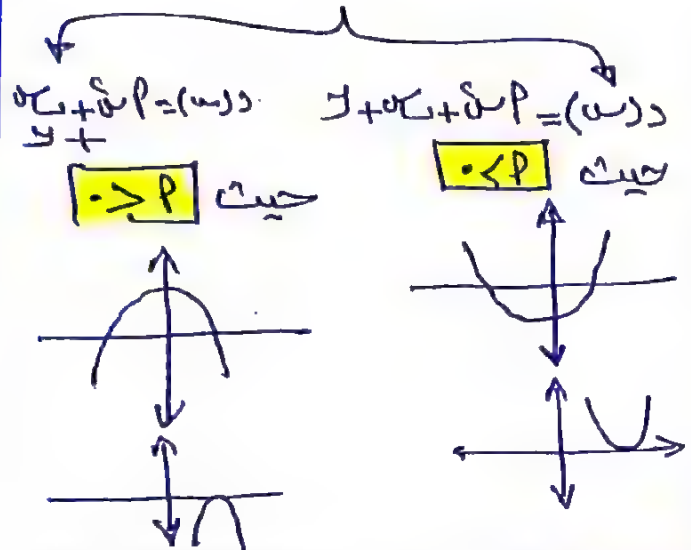
## ١) الدالة التربيعية

شكلها  $y = (x) = P + Qx + R$

هي دالة  $y = x$  حيث  $P, Q, R$  ثابتون ونحتمل  
منحني قطع

ونحتمل ~~منحني قطع~~ لمنحني

نقطة رأسه  $(-\frac{Q}{2R}, \frac{4PR - Q^2}{4R})$



## ٤) الصور القياسية

للدوال

## ١) الدالة التربيعية

$y = (x) = P + Qx + R$  رأسه المنحني لها  $(0, 0)$



$y = (x) = P + Qx + R$  رأسها  $(-P/Q, -R/Q)$

## ٢) الدالة التكعيبية

$y = (x) = P + Qx^2 + R$  رأسه المنحني لها  $(0, 0)$



$y = (x) = P + Qx^2 + R$  رأسها  $(-P/Q, -R/Q)$



## ٢ دالة الحقيقة

درس = (د) رأس الخزان لها (0,0) شكلها

درس = (د) رأسها (0,0) في الربع الأول والثاني  
لها الإشارة +

## ٣ دالة كمومية

درس = (د) رأسها (0,0) شكلها

درس = (د) رأسها (0,0) شكلها

## تكملة حل المعادلات

زوايا - حل معادلتين من الدرجة الأولى جيب في متغيرين

هناك طريقتان للحل إما بال حذف أو بالتحويل ولكن يفضل استخدام طريقة الحذف

مثال  $0 = 5 - 5 - 9$   $5 = 5 + 5 + 1 = 11$

الحل  
①  $0 = 5 - 5 - 9$   
②  $5 = 5 + 5 + 1 = 11$   
③  $5 = 5 + 5 + 1 = 11$   
لجمع ① مع ③

④  $1 = 5 - 5 - 9$

وبالتحويل في ①

$$0 = 5 + 5 - 9$$

$$0 = 5 - 5 - 9 \Rightarrow 5 = 5 - 9$$

$$[ (1 - 9) ] = 14$$

ثانياً: حل معادلتين من متغيرين أحدهما من الدرجة الأولى والاخرى من الثانية

خطوات الحل -

١ من معادلة الدرجة الأولى نخرج

أحد المتغيرين بدلالة الآخر

٢ نعوين في معادلة الدرجة الثانية

ونحصل على قيمة (أو قيمتين)

مثال  $1 = 5 - 5$   $5 = 5 + 5 + 1 = 11$

الحل

$$1 = 5 - 5 \Rightarrow 5 = 5 - 1 = 4$$

بالتحويل من ① في الدرجة الثانية

$$11 = 5 + 5 + 1$$

$$11 = 5 + 5 + 1$$

$$5 = 5 + 5 + 1 = 11$$

$$5 = 5 + 5 + 1 = 11$$

$$5 = (5 + 5) (1 - 5)$$

$$5 = 5$$

من ①

$$5 = 5$$

$$5 = 5$$

من ②

$$5 = 5$$

$$[ (1 - 9) ] = 14$$

الرياضيات



## الأعداد المركبة

التعريف حل المعادلة

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1}$$

العدد  $i = \sqrt{-1}$  لا لطيف

$$i^2 = -1$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1}$$

مجموعة الحل في  $\mathbb{C}$  =

لذلك تم اللجوء إلى مجموعة حل جديدة  
وهي مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$-i = \sqrt{-1}$$

$$\{i, -i\} = \sqrt{-1}$$

ملحوظة عامة

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$$

$$-i = \sqrt{-1} \Rightarrow (-i)^2 = -1$$

حيث أن أي عدد مركب مرفوع للأس يقبل  
الناتج في  $\mathbb{C}$  فيكون الناتج =  $\frac{1}{x}$

$$i^4 = 1 \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = 1$$

$$i^4 = 1 \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = 1$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

مثال

$$i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = 1$$

$$i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = 1$$

## العدد المركب

هو العدد الذي يمكن كتابته على

$$a + bi$$

جزء حقيقي جزء تخيلي

ولتسمى هذه الصيغة بالصيغة الجبرية

مثال

$$5 = 5 + 0i$$

$$5 = 5 + 0i$$

تساوي عددين مركبين

$$a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ و } b = d$$

فإن:

الحقيقي = الحقيقي      التخيلي = التخيلي

$$b = 0$$

$$d = 0$$

مثال أو بدقيتان  $a + bi$   $c + di$   
تحققا:  $a = c$  و  $b = d$

$$a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ و } b = d$$

الحقيقي = الحقيقي      التخيلي = التخيلي

$$a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ و } b = d$$

بفرض المعادلة  $a + bi = c + di$

$$a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ و } b = d$$

$$a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ و } b = d$$

بالجمع

$$a + bi = c + di$$

وبالتكويظ في

$$a + bi = c + di$$



## العمليات على الأعداد المركبة

(P) جمع وطرح الأعداد المركبة

عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً.

مثال أو بدائل كل من :-

$$I \quad (2 + 7i) + (-5 - 9i)$$

الحل

$$= (2 + 7i) + (-5 - 9i) =$$

~~~~~

$$II \quad (-4 - 9i) - (0 - 5i)$$

الحل

$$= (-4 - 9i) + (-0 + 5i) =$$

$$= (-4 - 9i) + (0 - 5i) =$$

~~~~~

نتائج مهمة جداً

$$*(1 + i)^2 = 2i$$

$$*(1 - i)^2 = -2i$$

$$III \quad (3 + 9i)^2$$

الحل

$$= (3 + 9i)^2 = 9 + 54i + 81i^2 =$$

~~~~~

$$IV \quad (4 + 3i)(-5 - 9i)$$

الحل

$$= -1 - 36i + 15i + 27 =$$

$$= 26 - 21i$$

## العدد المركب المترافق

العدد المركب المترافق  
لها نفس العدد ولكن يختلف  
في إشارة الجزء التخيلي فقط

مثال

$$\text{مترافق } 2 + 3i \leftarrow 2 - 3i$$

$$\text{مترافق } 2 - 3i \leftarrow 2 + 3i$$

$$\text{مترافق } 3i \leftarrow -3i$$

$$\text{مترافق } 2 \leftarrow 2$$

ملحظة مهمة

مصنوع هذا بآلة وجود  
في المقام فننظره من ذلك  
عن طريق الضرب في مترافقه المقام  
ليحاً ومقاماً

$$\text{مثال اختصر } \frac{3}{2 + i}$$

الحل

$$\frac{3}{2 + i} \times \frac{2 - i}{2 - i} =$$

$$= \frac{3(2 - i)}{4 - i^2} = \frac{6 - 3i}{5}$$

$$= \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$$

وأخيراً

للعقد المركب كالصورة الحثلية  
والصورة الأسية ولها دراستهم  
في الصف الثالث الثانوي



# المصفوفات

المصفوفة هي ترتيب لعدد من العناصر  
في شكل صفوف أفقية وأعمدة  
رأسية بين قوسين

المصفوفة المكونة من 3 صفوف و 4 أعمدة  
تكتب  $3 \times 4$

عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف  $\times$  الأعمدة  
$$= 3 \times 4 = 12$$

## أنواع المصفوفات الخاصة

### 1. مصفوفة الصف

هي مصفوفة تتكون من صف واحد وأى عدد  
من الأعمدة

مثال  $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$

### 2. مصفوفة العمود

هي مصفوفة تتكون من عمود واحد وأى  
عدد من الصفوف

مثال  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

### 3. مصفوفة المربعة

هي المصفوفة التي فيها عدد الصفوف  
يساوي عدد الأعمدة

مثال  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

## 4. المصفوفة الصفرية

هي مصفوفة لا يغير عناصرها أياً  
ورمزها  $\square$

مثال  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## 5. المصفوفة القطرية

جميع عناصرها أرقام ما عدا  
عناصر أو أحد عناصر القطر الرئيس  
ليساوي صفر

مثال  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

## 6. مصفوفة الوحدة

جميع عناصرها أرقام ما عدا  
عناصر القطر الرئيس يساوي واحد  
وترمز لها بالرمز  $I$

مثال  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 7. تساوي مصفوفتين

عندما يتساوى كل عنصر في المصفوفة  
الأولى مع نظيره في المصفوفة الاخرى  
بشرط أن تكون المصفوفتان على نفس  
النظم

مثال  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

20  $1=1$   $2=2$   $3=3$   $4=4$



## حزب المصفوفات

### شروطها

أن تكون عدد زخم المصفوفة  
بأول عدد عام المصفوفة الثانية

مثال إذا كانت  $P = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

فإن  $U = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  فإن  $UP = U$

الخط  $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = UP$

$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & 9+0 \\ 4+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

## المركب المصفوفات

$P \frac{1}{A} = P$

مثال إذا كانت  $P = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  فإن  $P$

الخط

$|P| = 2 - 36 = -34 \neq 0$

$\frac{1}{|P|} = \frac{1}{-34}$

$P = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

21

## حزب عدد زخم في مصفوفة

إذا كان

$\begin{pmatrix} P & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

مثال إذا كانت  $P = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

فإن  $P = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

## مدور المصفوفة

إذا كانت  $P = \begin{pmatrix} P & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

فإن  $P = \begin{pmatrix} P & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

مثال  $P = \begin{pmatrix} P & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

## المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة

إذا كانت  $P$  مصفوفة مربعة فإن

(1)  $P = P^T$  المتماثلة

(2)  $P = -P^T$  شبه المتماثلة

مثال إذا كانت  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

متماثلة فأوجد

الخط

$1 = 0 + 1$   
 $1 = 0 + 1$   
 $1 = 0 + 1$



## المصفوفة المثلثية

قيمة العدد الذي على الصورة المثلثية  
يا وي حامل ضرب عناصر القطر الرئيس

مثال

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \times 0 - 1 \times 0 = 0$$

مثال

$$= 1 - 0 \times 0 = 1$$

## رابعة) إيجاد مساحة المثلث

إذا كان عدد من ماله

س (ل، ط) د (س، د) ع (هـ، ع)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} = 8$$

## خامسة) إثبات أن النقطة هي استقامة

واحدة باستخدام المصفوفات

لإثبات أن النقطة س (ل، ط)

د (س، د) ع (هـ، ع)

على استقامة واحدة

نثبت أن

العدد = 0

وهو

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

22

## المحددات

### أولى) محدد الرتبة الثانية

قيمة عدد الرتبة الثانية يا وي حامل  
حزب عناصر القطر الرئيس مطروحاً عنه  
حامل ضرب عناصر القطر الفرعي

مثال

$$(2 \times 4) - (1 \times 1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

مثال

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

### ثانية) محدد الرتبة الثالثة

نقله باستخدام أي صف أو عمود ويضرب

بمستخدم الصف أو العمود الذي يحتوي

على أكثر من صف مع مراعاة قاعدة

إشارات العدد

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثال

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

العدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 2(0-1) + 3(1-0) = -1 + 2 + 3 = 4$$

$$= 18 + 27 - 18 = 27$$



# العتابعات

## أولاً: العتابة الحابية:

① شرط العتابة الحابية هو أن يكون أي تناقص الحد السابق له يساوي مقدار ثابت وليس هذا المقدار الثابت أساس العتابة ونزلة بالرمز (S)  $(S = \text{أي حد سابقه السابقة})$

مثال (٩ ٤ ٦ ١٠) ← هي متتابعة حسابية منتهية حيث  $S = 6 - 4 = 2$

مثال (٩ ٤ ٦ ١٠) ← هي متتابعة حسابية غير منتهية حيث  $S = 2$

## ٢. الصورة العامة للعتابة الحابية:

$(P + S, P + 2S, P + 3S, \dots, P + nS)$  حيث الحد الأول  $P$  الحد الذي قبل الأساس  $S$

$$P + S = 9 \quad P + 2S = 11$$

## ٣. الحد العام للعتابة الحابية:

$$U_n = P + (n-1)S$$

الحد الأول      رتبة الحد      الأساس  
                                 الخطلون

## ٤. ملاحظات عامة على العتابة الحابية

① إذا جاد رتبة أول حد موجب أو آخر حد موجب نفع  $U_n < P$

⑤ إذا جاد رتبة أول حد سالبه أو آخر حد سالبه نفع  $U_n > P$

⑥ إذا جاد رتبة الحد الذي قيمته س نفع  $U_n = S$

④ إذا كانت العتابة في صورة درجة أول كانت متتابعة حسابية وأساسها هو معامل  $n$

⑤ لتكوين العتابة الحابية يلزم إيجاد (P) (S) عن طريق حل معادلتها

## ٥. قوانين مجموع العتابة الحابية:

① إذا جاد عدد الأول والأساس

$$\left[ \frac{S(1-n) + Pn}{2} \right] \cdot \frac{n}{2} = \sum_{i=1}^n U_i$$

حيث  $n$  يعني عدد حدود العتابة

② إذا جاد عدد الأول والحد الأخير

$$\left[ \frac{U + P}{2} \right] \cdot \frac{n}{2} = \sum_{i=1}^n U_i$$

## ٦. خذ بالك من الكلام دا

① لو أعطى  $U_n$  في صورة دالة فإن

$$\left( \frac{U_n}{1-n} - \frac{U_n}{n} = nL \right)$$

⑤ أكبر مجموع للعتابة = مجموعة الحدود الموجبة فقط أو آخر مجموع = مجموع الحدود السالبة فقط

⑥ إذا جاد عدد الحدود التي تزيد المجموع

موجباً نفع  $U_n < P$

④ إذا جاد عدد الحدود التي تزيد

المجموع سالباً نفع  $U_n > P$







# الأسس عام

①  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

② عند ضرب الأسس المتشابهة نجمع الأسس

$2^m \times 2^n = 2^{m+n}$

③ عند قسمة الأسس المتشابهة نطرح الأسس.

$2^m \div 2^n = 2^{m-n}$

④  $2^m (2^n) = 2^{m+n}$

⑤ (الأسس)  $= 1$

نحتاج إلى أسس

⑥  $2^m (2^n) = 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n$

الحالات الأساسية

① إذا كان الأسس = الأسس  
فإن الأس = الأس

أحياناً إذا كان  $2^m \cdot 2^n = 2^p \Leftrightarrow 2^m = 2^p$

② ولكن إذا كان الأسس = الأسس

لأنه جيداً. أحياناً:  $2^m = 2^p$

نفردي  $2^m$  زوجي  $2^m$

$2^m = 2^p$   $2^m \pm 2^p$   $2^m = 2^p$

③ إذا كان  $2^m = 2^p$  فإن

$2^m \pm 2^p = 2^p$   $2^m = 2^p$

25

# التوافيق

①  $\frac{2^m}{1} = 2^m$  لو لم نحسب فيها

توافيق وتبديلة لنفس العلم والدليل

②  $\frac{2^m}{2} = 2^{m-1}$  تحت الطرف

③ التبسيط

$2^m = 2^m$

④ إذا كان

$2^m = 2^m$

أو  $2^m = 2^m + 2^m$

أما  $2^m = 2^m$

⑤  $2^m = 2^m = 2^m$

⑥ ترتيب  $2^m$  من الأشياء  $2^m$

⑦ ترتيب  $2^m$  من الأشياء في دائرة  $2^m$

⑧ عدد أقطار المثلث المكون من  $2^m$

$2^m = 2^m$

⑨ التباديل  $2^m$  كل ترتيب الاختيار  $2^m$

من الأشياء من بين  $2^m$  الأشياء

⑩ التوافيق  $2^m$  كل المجموعات الاختيار

من الأشياء من بين  $2^m$  من الأشياء

⑪ لا معنى لاسميت من

$2^m = 2^m$

$2^m < 2^m$



# الفرع الثاني: نسب المثلثات

① الزاوية  $\theta$  (١٨٠ - ٩٠ - ٢٠) لا  
تغير شكل الدالة المثلثية وكانت  
نראה الإشارة على حسب الدلي

فمثلاً:  $\sin(180 + \theta) = -\sin \theta$

$$\sin(180 - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180 + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(180 - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180 - \theta) = -\tan \theta$$

② الزاوية  $\theta$  (٩٠ - ٩٠ - ٢٧) تغير  
شكل الدالة المثلثية وكذلك أيضاً  
نראה الإشارة

$$\sin(90 - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90 - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90 - \theta) = \cot \theta$$

③ العمل العام على الدالة

$$\sin \theta = \cos(90 - \theta)$$

$$\sin \theta = \cos(90 - \theta) \Rightarrow \sin \theta = \cos(90 - \theta)$$

$$\sin \theta = \cos(90 - \theta) \Rightarrow \sin \theta = \cos(90 - \theta)$$

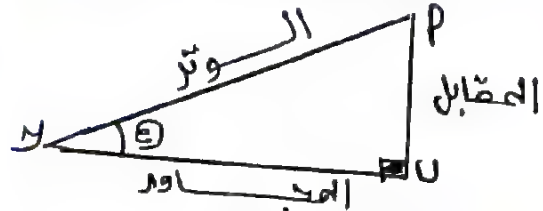
$$\sin \theta = \cos(90 - \theta) \Rightarrow \sin \theta = \cos(90 - \theta)$$

$$\sin \theta = \cos(90 - \theta) \Rightarrow \sin \theta = \cos(90 - \theta)$$

$$\sin \theta = \cos(90 - \theta) \Rightarrow \sin \theta = \cos(90 - \theta)$$

الزاوية  $\theta$  النسب المثلثية الزاوية  
للزاوية الحادة :-

في أي مثلث قائم الزاوية يكون



$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{QR}{PR}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{PQ}{PR}$$

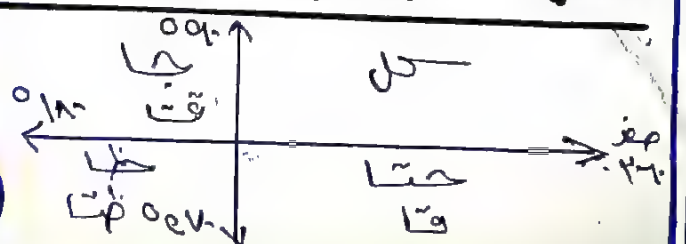
$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{QR}{PQ}$$

ملاحظة: أبعاد الدالة مقبولة = 1

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \quad \tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

| الزاوية         | ٥٦٥                  | ٥٦٠                  | ٥٦٠                  |
|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| النسبة المثلثية |                      |                      |                      |
| جاء             | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| جاء             | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| جاء             | ١                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{2}$        |

رابطات العلاقة بين الدوال  
المثلثية للزاويتين المتكاملتين





## أدلة القطع الدائري



هو جزء من سطح  
الدائرة محدود  
بفؤوس ونصف  
قطريه

$$\text{مساحة} = \text{ل} + \text{نقطة}$$

$$\frac{1}{2} \text{ نقطة} \leftarrow \text{مساحة}$$

$$\frac{1}{2} \text{ نقطة} \leftarrow \text{مساحة}$$

$$\frac{\pi \times \text{نقطة}}{360}$$



$$\frac{\text{ل}}{\text{نقطة}} = \frac{\pi}{360}$$

مساحة القطاع

$$\frac{\pi}{360} = \frac{\text{نقطة}}{\text{ل}}$$

$$\frac{\pi \times \text{نقطة}}{360} = \text{ل}$$

## أدلة القطع الدائري



هو جزء من سطح الدائرة محدود  
بفؤوس وقوس

$$\text{مساحة} = \text{ل} + \text{طول الوتر}$$

مساحة

$$\frac{1}{2} \text{ نقطة} = \left[ \frac{\text{ل}}{\text{نقطة}} - \frac{\text{ل}}{\text{نقطة}} \right]$$

## أدلة القطع الدائري

مساحة القطاع مستطوي

$$\frac{1}{2} \pi \times \text{نقطة} = \text{ل}$$

حيث  $n$  عدد الدوائر  
سـ طول القطر

## أدلة القطع الدائري

$$1 = \text{نقطة} + \text{نقطة}$$

$$\text{نقطة} = 1 - \text{نقطة}$$

$$1 + \text{نقطة} = \text{نقطة}$$

$$\text{نقطة} - \text{نقطة} = 1$$

$$1 + \text{نقطة} = \text{نقطة}$$

$$\text{نقطة} - \text{نقطة} = 1$$

## أدلة القطع الدائري

$$1 = (\text{نقطة} \pm \text{نقطة}) = \text{نقطة} \pm \text{نقطة}$$

$$\text{نقطة} = (\text{نقطة} \pm \text{نقطة}) = \text{نقطة} \pm \text{نقطة}$$

$$\text{نقطة} = (\text{نقطة} \pm \text{نقطة}) = \text{نقطة} \pm \text{نقطة}$$

## أدلة القطع الدائري

$$1 = \text{نقطة} = \text{نقطة}$$

$$\text{نقطة} = \text{نقطة} - \text{نقطة}$$

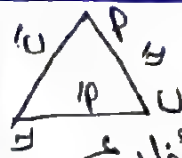
$$\text{نقطة} = 1 - \text{نقطة}$$

$$\text{نقطة} = \frac{\text{نقطة}}{1 - \text{نقطة}}$$

$$\text{نقطة} = \frac{1}{1 - \text{نقطة}}$$



# قانون الجيب



في أي مثلثه تتناسب أطوال أضلاعه  
المثلثه مع جيوب الزاوية المقابلة  
لها

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

نفسه نقطة بضعة طرالدائرة الخارجة  
لرؤوس المثلث.

ومن خواصه التناسبي

$$\frac{1/a + 1/b + 1/c}{1/a + 1/b + 1/c} = \frac{1/a}{1/a} = \frac{1/b}{1/b} = \frac{1/c}{1/c}$$

لذلك

نستخدم هذه القاعدة في حالة وجود  
زاويتان و ضلع في المثلث.

## قاعدة جيب التمام

(أ) في حالة وجود ضلعين و زاوية محصورة

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

(ب) في حالة وجود ثلث زوايا

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

# الزاوية خارجة التفاضل

إذا كانت  $P = (x, y)$  حيث

$$P = (x, y) \text{ حيث } x = \cos \theta, y = \sin \theta$$

$$\text{مثال } 0 = \sin \theta \leftarrow \theta = 0^\circ$$

$$\pi = \sin \theta \leftarrow \theta = 180^\circ$$

إذا كانت  $P = (x, y)$  حيث

$$P = (x, y) \text{ حيث } x = \cos \theta, y = \sin \theta$$

$$\text{مثال } 2 = \sin \theta \leftarrow \theta = 90^\circ$$

$$0 = \sin \theta \leftarrow \theta = 0^\circ$$

$$0 = \sin \theta \leftarrow \theta = 180^\circ$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$= \text{الدول} \times \text{المشتقة الثانية} + \text{الدالة الأولى} \times \text{المشتقة الأولى}$$

$$\text{مثال } (x + y) = \sin \theta$$

$$(x + y) = \sin \theta \leftarrow \theta = 90^\circ$$

$$0 - 0 = 1 - 0 = 1$$

مشتقة خارج قسمة دالتين

$$= \frac{\text{الدالة الأولى} \times \text{المشتقة الثانية} - \text{الدالة الثانية} \times \text{المشتقة الأولى}}{\text{المقام}^2}$$

$$\text{مثال } \frac{x + y}{x - y} = \sin \theta$$

$$(x + y) = \sin \theta \leftarrow \theta = 90^\circ$$

$$\frac{11 - 2 - 0 - 1 - 0}{9(4 - 0)} = \sin \theta$$



# ثابتة قواعد النهايات عند نقطة

1) التحويض المباشر على عدد حقيقي  
تعتبر النهاية زمالوا أعطى الناتج عدد  
[قيمة فيز معرفة] ولكن، اذا كان  
الناتج  $\frac{\text{مفر}}{\text{مفر}}$  [قيمة فيز معرفة]  
مثال:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0}$$

2) استخدام التحليل في إيجاد النهاية  
إذا كان ناتج التحويض المباشر  $\frac{\text{مفر}}{\text{مفر}}$   
مثال: أوجد  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

3) استخدام القسمة المطولة في إيجاد  
النهاية أيضاً إذا كان ناتج التحويض  $\frac{\text{مفر}}{\text{مفر}}$   
وكان المقادير معقدة تحليلية

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

29

4) مشتقة الجذر التربيعي:-

$$\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{\sqrt{\text{نفسه}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

5) مشتقة القوة العكس:-

$$\frac{\text{مشتقة القوة العكس}}{\text{مشتقة ما داخل القوة العكس}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

6) مشتقة الدوال العكسية:-

$$\frac{\text{مشتقة الدالة العكسية}}{\text{المشتقة الزاوية مع ثبوت الدالة}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

## ٦ إيجاد النهاية الدالة عند ∞

$$\text{نقطة لنهاية الدالة عند } \infty = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\text{لذا } \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\text{لذا } \frac{1}{\infty} = 0 = \frac{1}{\infty}$$

فكرة الحل

نقسم على س مرفوعة الأكبر أس في المقام

$$\text{مثال} \quad \frac{5x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5x + 9}$$

$$\frac{5x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5x + 9} \div \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 9}$$

$$\frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 - 5\frac{1}{x} + 9\frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{5 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\boxed{5} = \frac{5 - 0 + 0}{1 - 0 + 0}$$

## ٧ إيجاد وجود نهاية دالة معرفة

عند أكثر من قاعدة عند نقطة

عند ما يكون للدالة نهاية عند P

إذا كانت نهايتها على اليمين واليسار عند P موجودتين ومتساويتين

$$\text{مثال} \quad \text{إذا كانت دالة } f(x) = \begin{cases} 1 + 5x & x < 2 \\ 1 + 5x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

أوجد نهايتها عند P

$$\frac{1 + 5x}{1 + 5x^2}$$

$$\leftarrow \frac{1 + 5x}{1 + 5x^2} \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (1 + 5x) = 1 + 5(2) = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (1 + 5x^2) = 1 + 5(2^2) = 21$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (1 + 5x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} (1 + 5x^2)$$

لذا لا توجد نهاية عند x=2 ونحتاج إلى

30

$$\frac{(1-x)(1-x^2)}{(1-x)^2} = \frac{1-x^2}{1-x} = 1+x$$

$$\boxed{2} = 1 + 1 = 2$$

## ٤ استخدام الطريقة في إيجاد النهاية

أيضاً إذا كان الناتج  $\frac{0}{0}$  أو  $\frac{\infty}{\infty}$  أو  $\frac{-\infty}{\infty}$  أو  $\frac{\infty}{-\infty}$

في البسط أو في المقام أو في كليهما

مثال

$$\frac{1-x}{1+x}$$

$$\div$$

$$\frac{1-x}{1+x} \times \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x^2}$$

$$\frac{1-x^2}{1-x^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)} = 1$$

$$\boxed{1} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)}$$

## ٥ استخدام القانون في إيجاد النهاية

إذا كان الناتج  $\frac{0}{0}$  أو  $\frac{\infty}{\infty}$  أو  $\frac{-\infty}{\infty}$  أو  $\frac{\infty}{-\infty}$

حينئذ مرفوعة الأس

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x^3 - 4} = \frac{\infty - 2}{\infty - 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{مثال} \quad \frac{1-x}{2+x}$$

$$\div$$

$$\frac{1-x}{2+x} = \frac{1-x}{2+x} \times \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x^2}$$

$$\frac{1-x^2}{1-x^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)} = 1$$

$$\div$$

$$\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1+x}$$

$$\boxed{0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$



# ثالث: الهندسة التحليلية

## ١١) الهندسة التحليلية

إذا كانت  $P = (3, 4)$  و  $Q = (5, 6)$

$$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

مثال: أوجد طول  $PQ$  إذا كان

$$P(3, 4) \text{ و } Q(5, 6)$$

$$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

## ملحظات عامة

- معرفة نوع المثلث من حيث أطوال أضلاعه
- توجد البرهان لكل نقطة ونقطة
- معرفة نوع المثلث من حيث دواياه
- توجد البرهان لكل نقطة أو مربع
- إذا كان

$$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

## ١٢) إيجاد منصف قطعة مستقيمة

إذا كان  $P = (3, 4)$  و  $Q = (5, 6)$

$$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

مثال: إذا كان  $P(3, 4)$  و  $Q(5, 6)$

$$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(0, 2) =$$

# ١٣) كيفية البحث عن الدالة عند نقطة P

الدالة متصلة عند  $P$  إذا تحققت الآتي

د (P) معرفة الدالة لها نهاية عند  $P =$  نهايتها = نهايتها

مثال: البحث عن الدالة عند  $c =$

$$c \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2c-0}{c-0} \\ 0 \end{array} \right\} = (c) =$$

الجدول

$$D(0) = (0) =$$

$$D(0) = (0) = \frac{2c-0}{c-0} = \frac{2c}{c} = 2$$

$$D(0) = (0) = \frac{2c-0}{c-0} = \frac{2c}{c} = 2$$

$$D(0) = (0) = \frac{2c-0}{c-0} = \frac{2c}{c} = 2$$

∴ الدالة متصلة عند  $c = 0$

## ١٤) اتصال دالة على فترة

### (أ) الدالة كثيرة الحدود

متصلة على أي فترة جزئية منها

### (ب) الدالة الكسرية

متصلة على  $[a, b]$  أم لا

### (ج) دالة القيمة

متصلة على أي فترة جزئية منها

### (د) الدوال المثلثية

الجيبي وجيب التمام متصلة على

أما دالة الظل متصلة على

$$[a, b] \text{ حيث } a < \pi < b$$

## ٣ طرق إيجاد الميل

١) ابعولوجية نقطة

$$\text{الميل} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق المراتب}}$$

مثال: أوجد ميل الخط المستقيم المار

$$(200, 1) \text{ و } (100, 6)$$

الخط

$$m = \frac{1-6}{200-100} = \frac{-5}{100} = -\frac{1}{20}$$

٢) ابعولوجية الزاوية الموضوعة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

- ١) زاوية حادة
- ٢) منفرجة
- ٣) قائمة

$$\text{الميل} = \tan \theta$$

مثال: إذا كانت  $\theta = 45^\circ$

$$m = \tan 45^\circ = 1$$

٣) ميل الخط المستقيم الذي معادلة

$$y = mx + c$$

$$\text{الميل} = \frac{\text{معامل } y}{\text{معامل } x}$$

مثال: أوجد ميل المستقيم  $5x + 2y = 4$

$$m = -\frac{5}{2}$$

٤) ميل الخط المستقيم مع الصورة

$$m = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\text{الميل} = \cot \theta$$

الزاوية  $\theta$  هي طول الجزء المقطوع من محور الصادات

٥) ميل المستقيم المار بنقطة

$$y = mx + c \Rightarrow (y - c) = mx$$

$$m = \frac{y}{x}$$

## ٤ معادلة الخط المستقيم

١) ابعولوجية الميل ونقطة عليه

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي ميله

$$m = 2 \text{ ويمر بالنقطة } (100, 300)$$

الخط

$$y - 300 = 2(x - 100) \Rightarrow y = 2x - 100$$

٢) ابعولوجية نقطة عليه

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: أوجد معادلة المستقيم المار

$$(200, 1) \text{ و } (100, 6)$$

الخط

$$\frac{y - 1}{1 - 6} = \frac{x - 200}{200 - 100} \Rightarrow y - 1 = -5(x - 200)$$

٣) ابعولوجية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

$$y = mx + c$$

مثال: معادلة المستقيم الذي ميله  $m = 2$  ويصنع

$$y = 2x + c$$

$$y = 2x + 2$$



## ثالثاً: تطابق

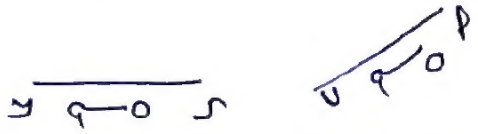
(أ) تطابقه زاوية

تطابق الزاوية إذا كانت  
متساوية في القياس



(ب) تطابقه قطعتين مستقيمتين

تطابق القطعتين المستقيمتين  
إذا كانتا متساويتين في الطول



(ج) تطابقه المثلثات

الحالة الأولى تطابقه المثلثات إذا

تطابقه ضلعان وزاوية محصورة في  
أحد المثلثات مع نظائرها في المثلث الآخر

الحالة الثانية تطابقه المثلثات إذا

تطابقه زاويتان والضلع المحصور  
بين رؤسهما في أحد المثلثات مع نظائرها  
في المثلث الآخر

الحالة الثالثة تطابقه المثلثات إذا

تطابقه ضلعان في أحد المثلثات مع  
نظائره في الآخر

الحالة الرابعة تطابقه المثلثات

القائمة الزاوية إذا تطابق وتر وأحد  
مماسي الضائقة في أحد المثلثات مع  
نظائرها في المثلث الآخر

الأسطورة

33

## أبواب الهندسة المستوية

### أولاً: أنواع الزوايا

١) الزاوية الصفرية  $0^\circ$  قياسها =  $0^\circ$

٢) الزاوية الحادة قياسها أكبر من  $0^\circ$

وأقل من  $90^\circ$

٣) الزاوية القائمة قياسها =  $90^\circ$

٤) الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من  $90^\circ$

وأقل من  $180^\circ$

٥) الزاوية المستقيمة قياسها =  $180^\circ$

٦) الزاوية المنعكسة قياسها أكبر من  $180^\circ$

وأقل من  $360^\circ$

## ثانياً: العلاقة بين الزوايا

١) الزاويتان المتضابتان بالرأس

هما زاويتان متساويتان في القياس

٢) الزاويتان المتتامتان مجموعهم =  $90^\circ$

٣) الزاويتان المتكاملتان مجموعهم =  $180^\circ$

٤) الزوايا المتجهة حول نقطة واحدة مجموعهم =  $360^\circ$

٥) متممات الزوايا الولاة متساوية في القياس

٦) مكملات الزوايا الواحدة متساوية في القياس

٧) الزاويتان المتجاورتان المتتامتان ضلعاهما

متساويان أما المتكاملتان فإن ضلعاهما

على استقامة واحدة



# خامساً: قوانين المساحة والاحجام



المثلث

مساحة

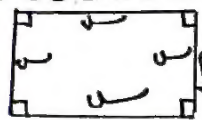
يجمع أحوال أضلاعه

مساحة

\*  $\frac{1}{2}$  طول القاعدة  $\times$  الارتفاع

\*  $\frac{1}{2}$  حاصل ضرب أي ضلع  $\times$  جيب المحصورة

\*  $\sqrt{2(2-a)(2-b)(2-c)}$  [هيرون]



المربع

مساحة

يجمع أحوال أضلاعه  $=$   $a \times b$

مساحة  $\frac{1}{2}$  (القطر)  $\times$  (القطر)  $?$

طول القطر  $\times$  نصفه  $=$   $a \times b$



المستطيل

مساحة

(الطول  $+$  العرض)  $\times$   $e = (a+b) \times e$

مساحة

الطول  $\times$  العرض  $= a \times b$

المكعب

المساحة الجانبية  $= 4 \times l$

المكعب  $= 6 \times l^2$

الحجم  $= l^3$

# وابعاً: إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فماذا؟

١ كل زاويتان متبادلتان [شكل Z] متاويتان  
في الشكل

مثلاً:  $d(1) = d(2)$  (بالتبادل)

٢ كل زاويتان متناظرتان [شكل F] متاويتان  
في الشكل

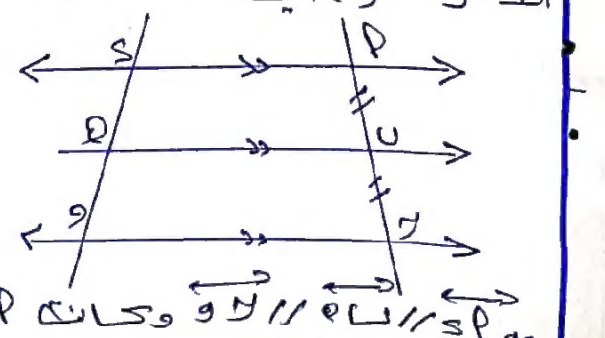
مثلاً:  $d(1) = d(2)$  (بالتناظر)

٣ كل زاويتان متداخلتان وفي جهة واحدة من الضامع متكاملتان

مثلاً:  $d(1) + d(2) = 180^\circ$

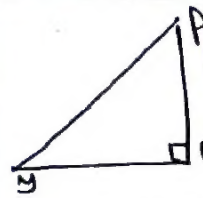
قاعدة متطابقة

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمان متوازيين وكانت أطوال القطع الناتجة من أحد الضامعين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة من الضامع الآخر تكون أيضاً متساوية



فإن  $d(1) = d(2)$





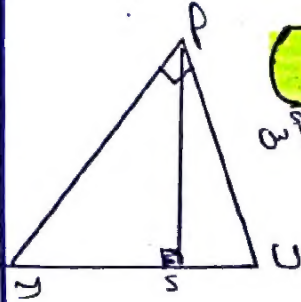
## (٥) نظرية فيثاغورس

في  $\Delta$  القائم الزاوية يكون مربع الوتر = مجموع مربعي الضلعين الآخرين

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$PQ^2 = PR^2 - QR^2$$

$$QR^2 = PR^2 - PQ^2$$



## (٥) نظرية أويلر

شكلاً عمود شاذل من رأس القائمة

$$PQ \times PR = QR^2$$

$$PQ \times PR = QR^2$$

$$PQ \times PR = QR^2$$

$$\frac{PQ \times PR}{QR} = QR$$

## (٥) المثلث المتساوي القائم

• زاوية القائمة في المثلث المتساوي القائم متساوية

• متوسط  $\Delta$  المتساوي القائم هو من الرأس ينصفه زاوية الرأس ويكون عمود على القاعدة

• المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي القائم عمودياً على القاعدة يمتد لينصفه كل من الضلعين وزاوية الرأس

• منصف زاوية رأس  $\Delta$  المتساوي القائم يكون عمودياً على القاعدة وينصفها

• عدد محاور تماثل المتساوي القائم = ١  
أما  $\Delta$  المثلث = ٣ بينما  $\Delta$  مختلف

الذي ضلعي =  $\Delta$  متساوي

35

## متوالت المستويات

السطوح المائلة والأولية القائمة

القاعدة

المنشور

المساحة الجانبية = محيط القاعدة  $\times$  الارتفاع

الكلية =  $\Delta$  الجانبية + منصفها مساحة القاعدة

الوجه = مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

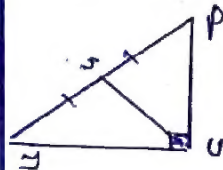
## سادساً ونظريات المثلث

### (٥) متوسط المثلث

• متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس

• متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة

• نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ٢:١ من جهة القاعدة ١:٢ من جهة الرأس



### (ب) المثلث القائم الزاوية

• طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة =  $\frac{1}{2}$  طول الوتر  
• طول الضلع المقابل للزاوية  $30^\circ$  في المثلث القائم =  $\frac{1}{2}$  طول الوتر  
• إذا طول الضلع المقابل  $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  طول الوتر  
• في  $\Delta$  القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث



• قياسه أى زاوية خارجية لملث  
أكبر من أى زاوية داخلية ما عدا  
التي لها.



أعني

$$\begin{aligned} \angle (P) &< \angle (Q) \\ \angle (P) &< \angle (R) \end{aligned}$$

• إذا اختلفت طولاهما في  
ملثت فأكبرهما في الطول  
تقابلها زاوية أكبر في المقابل  
من قياس الزاوية المقابلة للقطع  
الآخر.

• إذا اختلفت قياسا زاويتي  
في ملثت فأكبرهما في القياس  
تقابلها قطع أكبر في الطول من  
الذي يقابل الزاوية.

تم بحمد الله تعالى  
من الاعتماد من  
المذكرة التأسيسية  
إعداد الأستاذ P / أيمن  
- مبرور - / ت

## (و) المثلث المتساوي الأضلاع

• كل زوايا المثلث المتساوي الأضلاع  
متطابقة وقياسه كل منها = 60°  
• إذا كانت أضلاعه دوايا المثلث فبأنه يكون  
متساوي الأضلاع  
• المثلث المتساوي الأضلاع الذي إحدى  
أضلاعه 60° يكون متساوي الأضلاع.

## (ز) محور التماس

• محور تماس القطعة المستقيمة هو المستقيم  
العمودي عليها من منتصفها  
• أي نقطة تقع على محور تماس القطعة  
الحقيقية تكون على بعدين متساويين  
من طرفيها.  
• محور تماس الدائرة = عدد لا نهائي بينما  
أي نقطة من الدائرة = 1

## (ح) علاقات التماس في الدائرة

متساوية المثلث

في أى ملثت يكون مجموع طولي أي ضلعي أكبر  
من طول الضلع الثالث



$$\begin{aligned} p &< q + r \\ q &< p + r \\ r &< p + q \end{aligned}$$